

Problemas de 3 pontos

01. Qual é o valor de $\frac{7777^2}{5555 \times 2222}$?

- (A) 1 (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{49}{10}$ (D) $\frac{77}{110}$ (E) 49

02. Júlia lança um dado 5 vezes, obtendo um total de 19 pontos. No máximo, quantas vezes ela pode ter obtido 6 pontos por lançamento?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

03. Uma lata tem a forma de um cilindro reto cuja altura mede 15 cm e cujas bases têm 30 cm de perímetro cada uma. Uma formiga andou do ponto A da circunferência da base inferior até o ponto B da circunferência da base superior, conforme mostrado na figura ao lado. O caminho percorrido pela formiga, destacado pela linha mais grossa na figura, é composto por segmentos de reta verticais e arcos de circunferência paralelos às bases. Qual é o comprimento desse caminho, em centímetros?



- (A) 45 (B) 55 (C) 60 (D) 65 (E) 75

04. Emília tem 4 canetas de cores diferentes. Ela quer pintar as 3 faixas retangulares da bandeira ao lado, de tal modo que cada faixa tenha uma única cor e 2 faixas vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras ela pode fazer isso?



- (A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 (E) 64

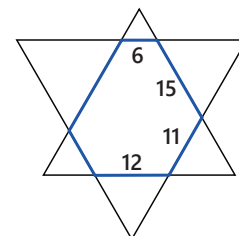
05. Chamamos um número inteiro positivo n de *duplo-primo* se ele tem exatamente os seguintes divisores distintos: 1, 2 e o próprio n . Quantos números duplos-primos existem?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

06. Quantos pares de números inteiros positivos x e y satisfazem a equação $x + 2y = 2^{10}$?

- (A) $2^9 - 1$ (B) 2^9 (C) $2^9 + 1$ (D) $2^9 + 2$ (E) 0

07. Dois triângulos equiláteros são juntados para formar um hexágono cujos lados opostos são paralelos. São conhecidas as medidas de 4 lados desse hexágono, como mostrado na figura ao lado. Qual é o perímetro desse hexágono?



- (A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72

08. Um quadrado de área 84 foi dividido em 4 quadrados. Destes novos quadrados, o que está na parte superior esquerda do quadrado original foi pintado de preto, o que está na parte inferior direita também foi dividido em 4 quadrados menores e assim por diante. Se esse processo for repetido infinitamente, qual será a área total pintada de preto?



- (A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42

09. Lia quer escrever os inteiros de 1 a 9 nas casas do tabuleiro 9×1 ao lado, de modo que os inteiros escritos em quaisquer 3 casas consecutivas tenham como soma um múltiplo de 3. Os números 7 e 9 já foram escritos. De quantas maneiras diferentes ela pode preencher as casas restantes?

	7		9					
--	---	--	---	--	--	--	--	--

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

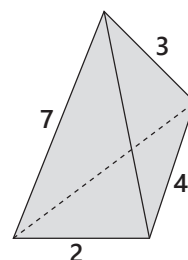
10. Qual é o algarismo das unidades do valor da expressão $(5^5 + 1)(5^{10} + 1)(5^{15} + 1)$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Problemas de 4 pontos

11. Um tetraedro tem arestas com medidas inteiras e 4 dessas medidas estão mostradas na figura. Qual é a soma das medidas das 2 outras arestas?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13



12. O produto de todos os números inteiros de 1 a n é representado por $n!$. Por exemplo, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. Qual é a soma dos algarismos de N , se $N! = 6! \times 7!$?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 9

13. Os gráficos das funções definidas por $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ passam todos por um certo ponto, qualquer que seja o valor de a . Qual é a soma das coordenadas desse ponto?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

14. Temos 5 números, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , cuja soma é S . Para cada k , $1 \leq k \leq 5$, sabemos que $a_k = k + S$. Qual é o valor de S ?

(A) $\frac{15}{4}$ (B) $-\frac{15}{4}$ (C) -15 (D) 15 (E) 0

15. Quantos pares de números inteiros m e n satisfazem a desigualdade $|2m - 2023| + |2n - m| \leq 1$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

16. Há 23 animais sentados em uma mesma fileira. Cada animal é um castor ou um canguru. Cada animal tem pelo menos um vizinho canguru. Qual é o maior número possível de castores nessa fileira?

(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

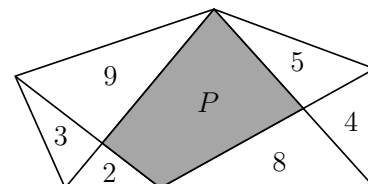
17. O número 5^{56} pode ser escrito na forma n^n para algum inteiro n . Qual é o valor de n ?

(A) 5^{30} (B) 5^6 (C) 5^5 (D) 30 (E) 11

18. Leonardo desenhou uma linha fechada na superfície de um bloco retangular. Qual das seguintes figuras pode ser uma planificação desse bloco?



19. Um pentágono foi dividido em partes menores, conforme mostrado. Os números dentro dos triângulos representam suas áreas. Qual é área P do quadrilátero cinza?



- (A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) 18

20. Quantos números inteiros positivos são fatores do número $2^{20}3^{23}$ mas não são fatores do número $2^{10}3^{20}$?

- (A) 13 (B) 30 (C) 273 (D) 460 (E) 2023

Problemas de 5 pontos

21. Duas funções f e g sobre R satisfazem o sistema de equações $\begin{cases} f(x) + 2g(1-x) = x^2 \\ f(1-x) - g(x) = x^2 \end{cases}$. Qual é a $f(x)$?

- (A) $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (C) $-x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (E) $x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
(B) $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$ (D) $x^2 - 4x + 5$

22. Numa competição de escalada, 13 esportistas competem em 3 categorias cada um. O escore de cada competidor é o produto de suas classificações nas 3 categorias. Por exemplo, se alguém for o 4º, o 3º e o 6º colocado nas três categorias, seu escore final será $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Quanto maior o escore, menor é a classificação final. Ana foi a 1ª colocada em duas categorias. Qual poderia ser sua menor classificação final?

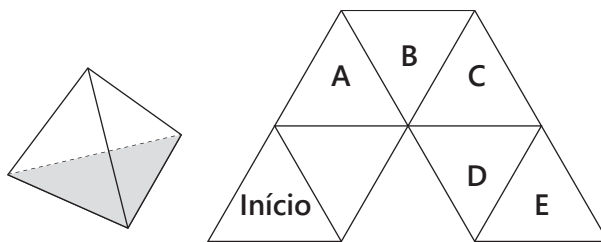
- (A) 2ª (B) 3ª (C) 4ª (D) 5ª (E) 6ª

23. Uma espiral é formada por números inteiros positivos, a partir do 1, conforme mostrado. Continuando a escrever os números dessa espiral, como vão aparecer os números 625, 626 e 627?

- (A) $\begin{matrix} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$ (C) $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$ (E) $\begin{matrix} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{matrix}$
(B) $\begin{matrix} 626 \rightarrow 627 \\ \uparrow \\ 625 \end{matrix}$ (D) $\begin{matrix} 625 \rightarrow 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{matrix}$

⋮	10	→	11	→	12	→	13	
↑	↑						↓	
24	9		2	→	3		14	
↑	↑		↑		↓		↓	
23	8		1		4		15	
↑	↑				↓		↓	
22	7	←	6	←	5		16	
↑							↓	
21	←	20	←	19	←	18	←	17

24. Um tetraedro regular tem uma face cinza. A face cinza do tetraedro é colocada em contato com o triângulo indicado pela palavra **Início** no diagrama plano. O tetraedro, então, é rolando de um triângulo para outro do diagrama por meio de um giro ao redor da sua aresta que coincide com o lado comum a 2 triângulos do diagrama. Em qual triângulo do diagrama a face cinza do tetraedro vai voltar a se apoiar novamente pela primeira vez?



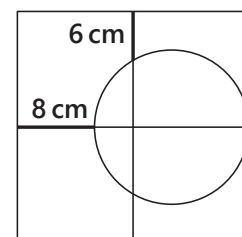
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

25. Parte de um polinômio do 5º grau está coberta por uma mancha de tinta, conforme mostrado. Sabe-se que todas as raízes desse polinômio são números inteiros. Qual é o maior valor de n para o qual $(x-1)^n$ divide esse polinômio?

$$x^5 - 11x^4 + \text{mancha de tinta} - 7$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. A figura mostra um quadrado grande dividido em 4 quadrados menores e uma circunferência interna que tangencia o quadrado grande no ponto médio de um de seus lados. Quanto medem os lados do quadrado grande?

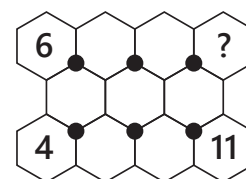


(A) 18 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 30 cm

27. Qual é o máximo divisor comum de todos os números representados pela seguinte expressão $n^3(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3(n+4)^3$, em que n é um número inteiro positivo?

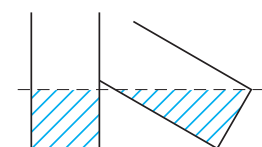
(A) $2^9 \cdot 3^3$ (B) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ (C) $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ (D) $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ (E) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

28. Os números de 1 a 11 devem ser escritos nos hexágonos de modo que a soma dos 3 números ao redor de cada círculo preto seja sempre a mesma. Já foram escritos 3 números. Qual número deve ser escrito no hexágono com o ponto de interrogação?



(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

29. Dois cilindros iguais contêm a mesma quantidade de água. Um deles está em pé e o outro está inclinado, conforme mostrado. Observamos na figura que os níveis de água em ambos os cilindros é o mesmo. A base de cada cilindro é um círculo de área $3\pi \text{ m}^2$. Qual é a quantidade de água em cada cilindro?



(A) $3\sqrt{3}\pi \text{ m}^3$ (B) $6\pi \text{ m}^3$ (C) $9\pi \text{ m}^3$ (D) $\frac{3}{4}\pi \text{ m}^3$ (E) $3\pi \text{ m}^3$

30. O produto de 6 números inteiros consecutivos é um número de 12 algarismos da forma **abb cdd cdd abb**, em que os algarismos **a**, **b**, **c** e **d** também são números inteiros consecutivos não necessariamente nessa ordem. Qual é o algarismo **d**?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5